CONCURSUL INTRAJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„VASILE DUMITRACHE”
31 MAI 2008
Clasa a X-a

I. Să se verifice egalitatea:

$$C_n^2 + C_n^3 + C_{n+1}^4 + C_{n+2}^5 + C_{n+3}^6 + C_{n+4}^7 = C_{n+5}^7, \ n \geq 2$$

Soluție: Se aplică formula de recurență.

$C_n^k + C_{n+1}^k = C_{n+1}^{k+1}, n \in N, k \in N, 0 \leq k \leq n$

Pentru k = 2 avem $C_n^2 + C_n^3 = C_{n+1}^3$ (2p)

Pentru k = 3 avem $C_{n+1}^3 + C_{n+1}^4 = C_{n+2}^4$ (2p)

Pentru k = 4 avem $C_{n+2}^4 + C_{n+2}^5 = C_{n+3}^5$ (2p)

Pentru k = 5 avem $C_{n+3}^5 + C_{n+3}^6 = C_{n+4}^6$ (2p)

Pentru k = 6 avem $C_{n+4}^6 + C_{n+4}^7 = C_{n+5}^7$ (2p)

II. Rezolvați ecuația:

$$(1+2^x)^n + (1+2^{-x})^n = 8, \ n \in \mathbb{N}$$

Solutie: Fie x o solutie a ecuației date.

$(1 + 2^x)^n + (1 + 2^{-x})^n \geq 2(2 + 2^x + 2^{-x})^{\frac{n}{2}} \geq 2 \cdot 2^n$ (2 puncte)

Adică $4 \geq 2^n \Rightarrow n \in \{0, 1, 2\}$. (2 puncte)

Pt. n = 1 $\Rightarrow x_{1,2} = \log_2(2 \pm \sqrt{3})$ (2 puncte)

n = 2 $\Rightarrow 2(2^x + 2^{-x}) + 2^{2x} + 2^{-x} = 6$ cu x = 0. (2 puncte)

Pt $n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$ ecuația devine imposibilă.(2 puncte)

III. Să se demonstreze că , dacă $n \in N$ şi $n \geq 3$, are loc inegalitatea:

$$\sqrt[n+1]{n+1} \leq \sqrt[n]{n}.$$

Soluție: Inegalitatea este echivalentă cu următoarea:

$$\frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{\sqrt[n]{n}} \leq 1 \text{ (1 punct)}$$

Membrul întâi al acestei inegalități se scrie astfel:

$$\frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{\sqrt[n]{n}} = \sqrt[n(n+1)]{\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}} = \sqrt[n(n+1)]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n}} \text{ (2 puncte)}$$

Se demonstrează că $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < n$.(1 punct) Dezvoltând conform binomului lui Newton , se obține:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1\cdot n}{n} + \frac{n(n-1}{2!}\cdot 1\cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot 1\cdot \frac{1}{n^3} + ... + \frac{1}{n^n}.$$ (2 puncte)

Având în vedere că suma $\frac{n(n-١)}{٢!n^{٢}} + \frac{n(n-١)(n-٢)}{٣!n^{٣}}$ se poate majora cu unu , iar ceilalți termeni din dezvoltare sunt majorați de unu , se obține :

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < n,\ \ n \geq 3$ (2 puncte), şi prin urmare , rezultă:

$$\frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{\sqrt[n]{n}} = \sqrt[n(n+1)]{\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < \sqrt[n]{\frac{n}{n}} = 1.$$ (2 puncte)