CONCURSUL INTRAJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„VASILE DUMITRACHE”
31 MAI 2008 - Clasa a IX-a
Barem

I. Pentru ce m∈ R ecuația:

$$\frac{x}{m}+\frac{8-m}{2m}+\frac{m-8}{x}=0$$

admite două rădăcini întregi?

Soluție: Se pun condițiile de existență $x\neq 0$ şi $m\neq 0$. (1 punct)

Eliminând numitorii se obține ecuația:

$$2x^2-(m-8)x+2m(m-8)=0 \text{ (2 puncte)}$$

$x_1, x_2 \in Z \Rightarrow x_1+x_2\in Z \Rightarrow \frac{m-8}{2}\in Z \Rightarrow m\in Z$ par (2 puncte)

şi $\Delta\geq 0 \Rightarrow$ (m-8)(15m+8)$\leq$ ٠ $\Rightarrow m\in[-\frac{٨}{١٥},٨]$ (2 puncte)

Cum este intreg par nenul $\Rightarrow m\in\{٢,٤,٦,٨\}$ (1 punct). Tinând cont de conditia $x\neq$ ٠ $\Rightarrow$ $m\neq$ ٨ (1 punct). Se obține in final că $m\in\{2,4,6\}$ (1 punct)

II. Fie x, y, z∈ $\left(٠,\frac{\pi}{٢}\right)$ astfel încât $\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z=1$. Să se arate că:

$tgx\cdot tgy + tgy\cdot tgz + tgz\cdot tgx \leq \frac{٣}{٢}$

Soluție: $\sin^{٢} x+\sin^{٢} y+\sin^{٢} z=1 \Leftrightarrow \cos^{٢} x=\sin^{٢} y+\sin^{٢} z$ (1 punct) $\Rightarrow$

$$tgx=\sqrt{\frac{\sin^{٢} x}{\sin^{٢} y+\sin^{٢} z}} \text{ (2 puncte)}$$

$$tgx\cdot tgy=\sqrt{\frac{\sin^2 x}{\sin^2 y+\sin^2 z}}\sqrt{\frac{\sin^2 y}{\sin^2 z+\sin^2 x}}=\sqrt{\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x+\sin^2 z}\cdot\frac{\sin^2 y}{\sin^2 y+\sin^2 z}}\leq \text{(2 pct)}$$

$$\leq\frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x+\sin^2 z}+\frac{\sin^2 y}{\sin^2 y+\sin^2 z}\right)\text{(3pct)}\Rightarrow tgx\cdot tgy + tgy\cdot tgz + tgz\cdot tgx\leq$$

$$\frac{١}{٢}(١+١+١)=\frac{3}{2}.\text{(2 puncte)}$$

III. Dacă [AD, [BE, [CF sunt bisectoarele interioare ale unghiurilor △ABC, atunci

$$\frac{1}{AD}+\frac{1}{BE}+\frac{1}{CF}>\frac{1}{AB}+\frac{١}{AC}+\frac{1}{BC}.$$

Rezolvare: Se demonstreaza intai relatia $\frac{2}{AD}>\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}$.

$|\overrightarrow{AD}|=\frac{1}{b+c}|b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}|<\frac{1}{b+c}b|\overrightarrow{AB}|+c|\overrightarrow{AC}|$ (2 puncte)$\Rightarrow AD\leq\frac{2bc}{b+c}$ (1 punct)$\Rightarrow$

$\frac{1}{AD}>\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$(1 punct)$\Rightarrow$ $\frac{2}{AD}>\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}$ (2 puncte)

Analog se obtin relatii pentru bisectoarele BE si CF (2 puncte)

Prin adunare $\Rightarrow$ $\frac{1}{AD}+\frac{1}{BE}+\frac{1}{CF}>\frac{1}{2}(\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}+\frac{1}{AB}+\frac{1}{BC}+\frac{1}{AC}+\frac{1}{BC})$(2 puncte)

Nota: Orice alta solutie corecta obtine punctaj maxim