# CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „VASILE DUMITRACHE”

Ediția a II-a

25 aprilie 2009

Clasa a XII-a

**I**. Se dau polinoamele $P, Q \in \mathbf{C}[X]$, $P(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + ... + a_n$, cu rădăcinile $x_1, x_2, ..., x_n$ şi respectiv $Q(X) = X^{n+1} + b_1 X^n + ... + b_{n+1}$, cu rădăcinile $y_1, y_2, ..., y_{n+1}$. Demonstrați că $P(y_1) \cdot P(y_2) \cdot ... \cdot P(y_{n+1}) = Q(x_1) \cdot Q(x_2) \cdot ... \cdot Q(x_n)$.

**II**. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel nenul, cu proprietatea că dacă $x, y \in A$ şi $xy = 1$, atunci $yx = 1$. Să se arate că, dacă $a, b, c \in A$ şi $a + b = ab$, $b + c = bc$, $c + a = ca$ atunci $4(a + b + c) = 3abc$.

**III**. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un şir cu termenul general $a_n = \int_1^n \left[\frac{n^2}{x}\right] dx$, unde s-a notat cu $[\alpha]$ partea întreagă a numărului real $\alpha$. Să se calculeze $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n^2 \cdot \ln n}$.

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Timp de lucru 2 ore.**
- **Fiecare subiect rezolvat corect se notează cu 7 puncte.**