

**Concursul interjudețean de matematică
„Vasile Dumitrache”, Bârlad
Ediția a II-a, 25 aprilie 2009**

CLASA A X-A

SUBIECTUL 1.

Să se demonstreze că dacă o funcție $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este subaditivă, ceea ce înseamnă că satisface inegalitatea

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y), (\forall) x, y \in \mathbb{R},$$

și există o constantă $c \in \mathbb{R}$, astfel încât:

$$f(x) \leq cx, (\forall) x \in \mathbb{R}, \text{ atunci } f(x) = cx, (\forall) x \in \mathbb{R}.$$

Arătați că acest rezultat nu este adevărat pentru funcții definite pe intervalul $[0, \infty)$.

SUBIECTUL 2.

Să se demonstreze egalitatea:

$$1 + \sum_{k=0}^n \left(\frac{k+3}{k+1} \cdot C_{2k+3}^k \right) = C_{2n+3}^{n+1} + \sum_{k=0}^n \left(\frac{2k+1}{k+1} \cdot C_{2k}^k \right)$$

SUBIECTUL 3.

Fie $\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}$, $k < n$, $\varepsilon_n = \varepsilon_0$.

Arătați că $n \cdot \sin \frac{2\pi}{n} < \sum_{k=1}^n \left| \varepsilon_k - \varepsilon_{k-1} \right| < 2\pi$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.

Timp efectiv de lucru: 2 ore.

CLASA A X A

SUBIECTUL 1.

Dacă $a, b, c > 1$, să se demonstreze inegalitatea:

$$a\sqrt[3]{\log_a b} + \sqrt[3]{\log_a c} + b\sqrt[3]{\log_b a} + \sqrt[3]{\log_b c} + c\sqrt[3]{\log_c a} + \sqrt[3]{\log_c b} \leq \frac{(a+b+c)^2}{3}$$

Soluție:

Deoarece $a, b, c > 1$ atunci $\log_a b > 0, \log_a c > 0, \log_b a > 0, \log_b c > 0, \log_c a > 0, \log_c b > 0$ **(1p)**

Folosind inegalitatea mediilor obținem:

$$\sqrt[3]{\log_a b} + \sqrt[3]{\log_a c} = \sqrt[3]{1 \cdot \log_a b} + \sqrt[3]{1 \cdot \log_a c} \leq \frac{1 + 1 + \log_a b}{3} + \frac{1 + 1 + \log_a c}{3} \quad \text{(2p)}$$

$$\frac{1 + 1 + \log_a b}{3} + \frac{1 + 1 + \log_a c}{3} = \frac{\log_a a^2 b}{3} + \frac{\log_a a^2 c}{3}$$

$$\frac{\log_a a^2 b}{3} + \frac{\log_a a^2 c}{3} = \frac{\log_a a^4 bc}{3} = \log_a a \sqrt[3]{abc} \quad \text{(1p)}$$

Cum $a, b, c > 1$ avem:

$$a\sqrt[3]{\log_a b} + \sqrt[3]{\log_a c} + b\sqrt[3]{\log_b a} + \sqrt[3]{\log_b c} + c\sqrt[3]{\log_c a} + \sqrt[3]{\log_c b} \leq$$

$$\leq a \log_a a \sqrt[3]{abc} + b \log_b b \sqrt[3]{abc} + c \log_c c \sqrt[3]{abc} \quad \text{(1p)}$$

$$a \log_a a \sqrt[3]{abc} + b \log_b b \sqrt[3]{abc} + c \log_c c \sqrt[3]{abc} = a \sqrt[3]{abc} + b \sqrt[3]{abc} + c \sqrt[3]{abc} \quad \text{(1p)}$$

$$a \sqrt[3]{abc} + b \sqrt[3]{abc} + c \sqrt[3]{abc} = (a+b+c) \sqrt[3]{abc} \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} \quad \text{(1p)}$$

SUBIECTUL 2.

Să se demonstreze egalitatea:

$$1 + \sum_{k=0}^n \left(\frac{k+3}{k+1} \cdot C_{2k+3}^k \right) = C_{2n+3}^{n+1} + \sum_{k=0}^n \left(\frac{2k+1}{k+1} \cdot C_{2k}^k \right)$$

Soluție:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n \left(\frac{k+3}{k+1} \cdot C_{2k+3}^k \right) - \sum_{k=0}^n \left(\frac{2k+1}{k+1} \cdot C_{2k}^k \right) = \\ & = \sum_{k=0}^n \left(\frac{k+3}{k+1} \cdot C_{2k+3}^k - \frac{2k+1}{k+1} \cdot C_{2k}^k \right) \end{aligned} \quad (1p)$$

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{k+3}{k+1} \cdot C_{2k+3}^k - \frac{2k+1}{k+1} \cdot C_{2k}^k \right) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{k+3}{k+1} \cdot \frac{(2k+3)!}{k!(k+3)!} - \frac{2k+1}{k+1} \cdot \frac{(2k)!}{k!k!} \right) \quad (1p)$$

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{k+3}{k+1} \cdot \frac{(2k+3)!}{k!(k+3)!} - \frac{2k+1}{k+1} \cdot \frac{(2k)!}{k!k!} \right) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{(2k+3)!}{(k+1)!(k+2)!} - \frac{(2k+1)!}{(k+1)!k!} \right) \quad (1p)$$

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{(2k+3)!}{(k+1)!(k+2)!} - \frac{(2k+1)!}{(k+1)!k!} \right) = \sum_{k=0}^n \left(C_{2k+3}^{k+1} - C_{2k+1}^k \right) \quad (2p)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n \left(C_{2k+3}^{k+1} - C_{2k+1}^k \right) = C_3^1 - C_1^0 + C_5^2 - C_3^1 + C_7^3 - C_5^2 + \dots + \\ & + C_{2n+3}^{n+1} - C_{2n+1}^n \end{aligned} \quad (1p)$$

$$C_3^1 - C_1^0 + C_5^2 - C_3^1 + C_7^3 - C_5^2 + \dots + C_{2n+3}^{n+1} - C_{2n+1}^n = C_{2n+3}^{n+1} - C_1^0 = C_{2n+3}^{n+1} - 1 \quad (1p)$$

CLASA A XA

SUBIECTUL 3.

Fie $\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$, $n \in \mathbf{N}^*$, $k \in \mathbf{N}$, $k < n$, $\varepsilon_n = \varepsilon_0$.

Arătați că $n \cdot \sin \frac{2\pi}{n} < \sum_{k=1}^n |\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}| < 2\pi$.

Soluție:

ε_k = afixele poligonului regulat înscris în cercul unitate,
(2p)

de perimetru $\sum_{k=1}^n |\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}| < 2\pi$ = lungimea cercului;
(2p)

$$|\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}| = 2 \sin \frac{\pi}{n},$$

(2p)

finalizarea(1p)