Propunere de barem de corectare
Clasa a XII-a

Problema 1. Se dau polinoamele $P,Q \in \mathbf{C}[X]$, $P(X) = X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_n$, cu rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ şi respectiv $Q(X) = X^{n+1} + b_1X^n + \ldots + b_{n+1}$, cu rădăcinile $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$. Demonstrați că $P(y_1)\cdot P(y_2)\cdot\ldots\cdot P(y_{n+1}) = Q(x_1)\cdot Q(x_2)\cdot\ldots\cdot Q(x_n)$

Rezolvare: Avem: $P(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - x_i)$, respectiv $Q(X) = \prod_{j=1}^{n+1}(X - y_j)$ (**2p**); prin urmare putem scrie $P(y_j) = \prod_{i=1}^{n}(y_j - x_i)$, pentru orice $j \in \{1,\ldots,n+1\}$, respectiv $Q(x_i) = \prod_{j=1}^{n+1}(x_i - y_j)$, pentru orice $i \in \{1,\ldots,n\}$ (**1p**).

Atunci avem:

$$P(y_1)\cdot P(y_2)\cdot\ldots\cdot P(y_{n+1}) = \prod_{j=1}^{n+1}\prod_{i=1}^{n}(y_j - x_i) = (-1)^{n(n+1)}\cdot\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n+1}(x_i - y_j) = (-1)^{n(n+1)}\cdot Q(x_1)\cdot\ldots\cdot Q(x_n)$$

(**2p**). Dar $(-1)^{n(n+1)} = 1$, deoarece $n(n+1)$ este par(**2p**). Ceea ce trebuia demonstrat.

Problema 2. Fie $(A,+,\cdot)$ un inel nenul, cu proprietatea că dacă $x,y \in A$ şi $xy = 1$, atunci $yx = 1$. Să se arate că, dacă $a,b,c \in A$ şi $a+b = ab$, $b+c = bc$, $c+a = ca$ atunci $4(a+b+c) = 3abc$.

Rezolvare: Egalitatea $ab = a+b$ se scrie $(a-1)(b-1) = 1$ (**2p**), de unde rezultă $(b-1)(a-1) = 1$, deci $ab = ba$ (**1p**). Analog obținem $bc = cb$ şi $ac = ca$. Atunci putem scrie succesiv:

$$\begin{aligned}&4(a+b+c) = 2(a+b+b+c+c+a) = 2(ab+bc+ca) = ab+bc+bc+ca+ca+ab = \\ &= a(b+c)+b(a+c)+c(a+b) = abc+bac+cab = 3abc\end{aligned}$$ (**4p**)

Problema 3. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir cu termenul general $a_n = \int_1^n \left[\frac{n^2}{x}\right]dx$, unde s-a notat cu $[\alpha]$ partea întreagă a numărului real α. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2\cdot\ln n}$.

Rezolvare: Se observă că pentru $x \in [1,n]$ avem $n \leq \frac{n^2}{x} \leq n^2$ (**1p**). Dacă notăm $\left[\frac{n^2}{x}\right] = p$, unde (**1p**), avem că $\frac{n^2}{x} - 1 < p \leq \frac{n^2}{x}$, de unde deducem că $\frac{n^2}{p+1} < x \leq \frac{n^2}{p}$ (**1p**).

Putem scrie acum $a_n = \sum_{p=n}^{n^2-1} \int_{\frac{n^2}{p+1}}^{\frac{n^2}{p}} p\,dx = \sum_{p=n}^{n^2-1} p\left(\frac{n^2}{p} - \frac{n^2}{p+1}\right) = n^2\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right)$ (**2p**). Considerăm $b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$ (**1p**). Putem scrie $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^2 \cdot \ln n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_{n^2} - b_n}{\ln n} + 1\right) = 0 + 1 = 1$ (**1p**).