Barem Clasa a XI-a

SUBIECTUL1.

Fie $A = \begin{pmatrix} i\cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & -i\cos\alpha \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} i\sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & -i\sin\alpha \end{pmatrix}; \alpha \in R$;

a)Arătați că: $A^{2009} = A$.

b)Găsiți $n \in N^*$,astfel încât $\det(A+\lambda B)^n = \det(A-\lambda B)^n, \forall \lambda \in R$

Soluție:

a)

$$A^2 - (TrA)A + (\det A) I_2 = O_2$$

TrA=0

detA=1

Rezultă: $A^2 = -I_2$ **(2p)**

$$A^{2009} = \left(A^2\right)^{1004} A = A \quad \textbf{(1p)}$$

b)

$$\det(A+\lambda B)^n = \det(A-\lambda B)^n \Rightarrow$$

$$\left(\det(A+\lambda B)\right)^n = \left(\det(A-\lambda B)\right)^n \quad \textbf{(1p)}$$

dar

$$\det(A+\lambda B) = (\cos\alpha + \lambda\sin\alpha)^2 + (\sin\alpha + \lambda\cos\alpha)^2 =$$

$$= 1 + 2\lambda\sin 2\alpha + \lambda^2 \geq 0 \quad \textbf{(1p)}$$

$$\det(A-\lambda B) = 1 - 2\lambda\sin 2\alpha + \lambda^2 \geq 0$$

Atunci:

$$\left(\det(A+\lambda B)\right)^n = \left(\det(A-\lambda B)\right)^n, (\forall)\lambda \in R$$

$$\Rightarrow \quad 4\lambda\sin 2\alpha = 0, (\forall)\lambda \in R \Rightarrow \quad \textbf{(1p)}$$

$$\sin 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{k\pi}{2}, k \in Z$$

Deci:

pentru $\alpha \in \left\{\frac{k\pi}{2} \middle| k \in Z\right\}$ *egalitatea are loc* $(\forall) n \in N^*, (\forall)\lambda \in R$

pentru $\alpha \notin \left\{\frac{k\pi}{2} \middle| k \in Z\right\}$ *nu există* $n \in N^*$ *cu* proprietatea cerută. **(1p)**

SUBIECTUL 2.

$$Fie\ f:[0,\infty]\to R, f(x)=x\left[\sqrt{x}\right]$$
$$și\ x_n=\sum_{k=1}^{n} f\left(k^2+k\right),(\forall)n\geq 1.$$
$$Calculați:\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4x_n}{n^4}\right)^n$$

Soluție:

$$f(x)=\begin{cases} 0, x\in[0,1) \\ x, x\in\left[1,2^2\right) \\ 2x, x\in\left[2^2,3^2\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ kx, x\in\left[k^2,(k+1)^2\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

(2p)

dar
$$k^2<k^2+k<(k+1)^2,(\forall)k\geq 1$$
$$\Rightarrow\left[\sqrt{k^2+k}\right]=k$$

(1p)

$$f\left(k^2+k\right)=\left(k^2+k\right)k\Rightarrow$$

deci $x_n=\sum_{k=1}^{n}\left(k^3+k^2\right)=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$\Rightarrow x_n=\frac{n(n+1)\left(3n^2+7n+2\right)}{12}$$

(2p)

Atunci

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4x_n}{n^4}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n(n+1)(3n^2+7n+2)}{3n^4}\right]^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\left(\frac{3n^2+7n+2}{3n^2}\right)^n\right] =$$

$$= e\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{7n+2}{3n^2}\right)^{\frac{3n^2}{7n+2}}\right]^{\frac{7n+2}{3n}} =$$

$$= e\cdot e^{\frac{7}{3}} = e^{\frac{10}{3}}$$

(2p)

SUBIECTUL 3.

Se consideră f:R$\to$ R o funcție continuă cu proprietatea că există $\lim_{x\to -\infty}(f(x)+x)$ și $\lim_{x\to \infty}(f(x)+x)$ ambele finite.

Arătați că:

a)funcția f nu este mărginită;

b)dacă $f+1_R$ este periodică , atunci există $a\in R$ astfel încât $f(x)=-x+a, (\forall)x\in R$.

Soluție:

a)Dacă presupunem prin absurd că f este mărginită inferior , atunci există $m\in R$ cu $f(x)\geq m,(\forall)x\in R,$ de unde rezultă : $f(x)+x\geq m+x,(\forall)x\in R.$

(2p)

Prin trecerea la limită cu $x\to\infty$, obținem $\lim_{x\to\infty}(f(x)+x)=\infty$

ceea ce contrazice ipoteza.

(1p)

Aşadar f nu este mărginită inferior şi analog se arată că f nu este mărginită superior.

(1p)

b) Dacă presupunem că funcția $f+1_R$ nu ar fi constantă , atunci cum ea este periodică nu ar exista $\lim_{n\to\pm\infty}f(x)$, ceea ce contrazice ipoteza.

(2p)

Aşadar $f+1_R$ este constantă ,

adică există $a\in R$ cu proprietatea : $f(x)=-x+a,(\forall)x\in R.$

(1p)