BAREM clasa a IX-a

1. Să se rezolve sistemul cu coeficienți reali:

$$\begin{cases} x^2 + yz = a^2 \\ y^2 + zx = a^2 \\ z^2 + xy = a^2 \end{cases}$$

Solutie:

Scăzând primele două ecuații obținem : **1p**
(x-y)(x+y-z)=0 şi distingem 2 cazuri : **1p**
i) daca x=y, înlocuind în sistem, suntem conduşi la cazurile : (1) x=y=z si (2) x=y, z=0.
Cu (1)găsim că sistemul se reduce la rezolvarea ecuatiei $2x^2 = a^2$ şi gasim soluțiile :
$\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ si $\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$
iar cu (2) soluțiile (a,a,0) si (-a,-a,0).
Datorita simetriei sistemului, vor fi soluții si tripletele
(a,0,a) (-a,0,-a) si (0,a,a) ,(0,-a,-a). **3p**

ii) Daca x+y=z, inclocuind în sistem suntem conduşi la xy=0 cu subcazurile x=0 respectiv y=0 care nu dau soluții noi față de cele obținute la punctul i). **2p**

2. Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (0,1)$, n $n \in N^*$, $n \neq 1$ să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{a_1}{a_1a_2 + n - 1} + \frac{a_2}{a_2a_3 + n - 1} + \ldots + \frac{a_n}{a_na_1 + n - 1} \leq 1$$

Soluție:

Avem

$$\frac{a_1}{a_1a_2 + n - 1} + \frac{a_2}{a_2a_3 + n - 1} + \ldots + \frac{a_n}{a_na_1 + n - 1} \leq$$

$$\frac{a_1}{a_1a_2\ldots a_n + n - 1} + \frac{a_2}{a_1a_2\ldots a_n + n - 1} + \ldots + \frac{a_n}{a_1a_2\ldots a_n + n - 1} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{a_1a_2\ldots a_n + n - 1} \quad \textbf{2p}$$

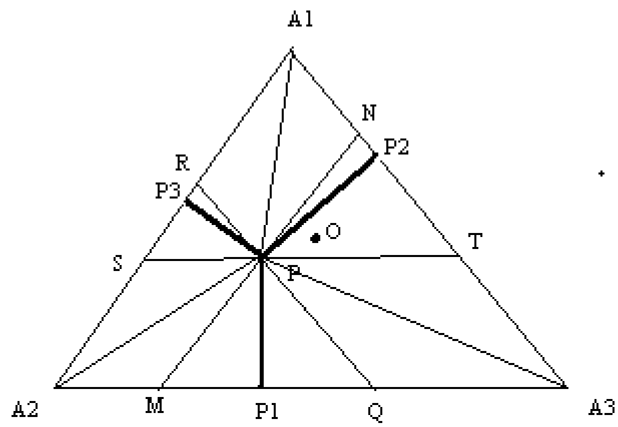
Suficient să demonstrez că $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq a_1a_2\ldots a_n + n - 1$ **1p**
Dar pentru $x, y \in [0,1] \rightarrow (1 - x)(1 - y) \geq 0 \rightarrow x + y \leq 1 + xy$ **2p**
Deci $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq 1 + a_1a_2 + a_3 + \ldots + a_n \leq 2 + a_1a_2a_3 + a_4 + \ldots + a_n$
$\leq 3 + a_1a_2a_3a_4 + a_5 + \ldots + a_n \leq \ldots . \leq n - 1 + a_1a_2\ldots a_n$ **2p**

3.Fie P un punct în interiorul unui triunghi echilateral de centru O. Notăm cu P_1, P_2, P_3 proiecțiile lui P pe laturile triunghiului. Să se arate că:

$$\vec{PP_1}+\vec{PP_2}+\vec{PP_3}=\frac{3}{2}\vec{PO}\cdot$$

Soluție

Fie $A_1A_2A_3$ un triunghi echilateral. Prin P ducem paralele la laturile triunghiului, iar notațiile ca în figura de mai jos. **1p**



Evident ca triunghiul PMQ este echilateral, iar PP_1 este mediana. **1p** Urmează că:

(1) $2\vec{PP_1}=\vec{PM}+\vec{PQ}$

Analog

(2) $2\vec{PP_2}=\vec{PT}+\vec{PN}$

(3) $2\vec{PP_3}=\vec{PS}+\vec{PR}$ **1p**

Sumând relațiile (1), (2) si (3) obtinem:

(4) $2(\vec{PP_1}+\vec{PP_2}+\vec{PP_3})=(\vec{PQ}+\vec{PT})+(\vec{PN}+\vec{PR})+(\vec{PS}+\vec{PM})=\vec{PA_3}+\vec{PA_1}+\vec{PA_2}$

Deci:

(5) $\vec{PP_1}+\vec{PP_2}+\vec{PP_3}=\frac{1}{2}(\vec{PA_1}+\vec{PA_2}+\vec{PA_3})$ **2p**

Dar $\vec{PA_1}=\vec{PO}+\vec{OA_1}$; $\vec{PA_2}=\vec{PO}+\vec{OA_2}$; $\vec{PA_3}=\vec{PO}+\vec{OA_3}$ care prin sumare dau:

$\vec{PA_1}+\vec{PA_2}+\vec{PA_3}=3\vec{PO}$ deoarece $\vec{OA_1}+\vec{OA_2}+\vec{OA_3}=\vec{0}$ intrucat O este centrul de greutate al triunghiului. **1p**

Deci $\vec{PP_1}+\vec{PP_2}+\vec{PP_3}=\frac{3}{2}\vec{PO}$.**1p**