CONCURSUL INTERJUDETEAN DE MATEMATICA

“VASILE DUMITRACHE”

24 aprilie 2010

CLASA A-IX-A

1.Fie $p\in N$ un numar prim. Sa se determine toate numerele intregi $k\in Z$ pentru care $\sqrt{k^2-pk}$ sa fie numar natural.

2.Pe laturile triunghiului ABC se considera punctele $A_1\in(BC),\quad B_1\in(CA),\quad C_1\in(AB)$ care le impart in acelasi raport pozitiv neunitar. Fie $\{A_2\}=BB_1\cap CC_1$, $\{B_2\}=CC_1\cap AA_1$, $\{C_2\}=AA_1\cap BB_1$. Aratati ca:

a) Triunghiurile ABC si $A_2B_2C_2$ au acelasi centru de greutate.

b) Vectorii $\overrightarrow{AA_2},\overrightarrow{BB_2},\overrightarrow{CC_2}$ pot fi laturile unui triunghi.

3.Sa se rezolve in R ecuatia

$$\{x\}^n-[x]^n=x^n$$

unde $\{x\}$, $[x]$ reprezinta partea fractionara, respectiv intreaga a lui x, iar $n\in N$.

SOLUȚII

1.Fie p∈ N un numar prim. Sa se determine toate numerele intregi k∈ Z pentru care $\sqrt{k^2 - pk}$ sa fie numar natural.

1. Notăm $\sqrt{k^2 - p\cdot k} = a \in \mathbf{N}$; atunci ecuația $k^2 - pk - a^2 = 0$ are soluțiile $k_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 + 4a^2}}{2} \in \mathbf{Z}$ (**2p**) şi deci $p^2 + 4a^2$ este pătrat perfect (**1p**) notat $q^2, \quad q \in \mathbf{N}$.

Deci $p^2 = (q-2a)(q+2a)$ (**1p**) şi cum $q + 2a \geq q - 2a$ iar *p* este prim rezultă:

- $\begin{cases} q + 2a = p^2 \\ q - 2a = 1 \end{cases}$ de unde $q = \frac{p^2+1}{2} \in \mathbf{N}$ doar pentru *p* impar (deci diferit de 2) şi $a = \frac{p^2-1}{4}$
- sau $\begin{cases} q - 2a = p \\ q + 2a = p \end{cases}$ de unde $a = 0, \quad q = p$ şi deci $k = p$ sau $k = 0$.(**2p**)

În concluzie $k = \frac{p \pm q}{2} = \frac{p \pm \frac{p^2+1}{2}}{2}$, adică $k = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2$ sau $k = -\left(\frac{p-1}{2}\right)^2$.(**1p**).

2. Pe laturile triunghiului ABC se considera punctele $A_1 \in (BC), \quad B_1 \in (CA), \quad C_1 \in (AB)$ care le impart in acelasi raport pozitiv neunitar. Fie $\{A_2\} = BB_1 \cap CC_1$, $\{B_2\} = CC_1 \cap AA_1$, $\{C_2\} = AA_1 \cap BB_1$. Aratati ca:

c) Triunghiurile ABC si $A_2B_2C_2$ au acelasi centru de greutate

d) Vectorii $\overrightarrow{AA_2}, \overrightarrow{BB_2}, \overrightarrow{CC_2}$ pot fi laturile unui triunghi.

Solutie: Notam $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AC_1}{C_1B} = k$. Daca aplicam teorema lui Menelaos in ΔABB_1 avem:

$\frac{BA_2}{A_2B_1} * \frac{AC_1}{C_1B} * \frac{B_1C}{AC} = 1$ (**1p**) $\Leftrightarrow \frac{BA_2}{A_2B_1} = \frac{k+1}{k^2}$ de unde

$\overrightarrow{OA_2} = \frac{k^2}{k^2+k+1}\overrightarrow{OB} + \frac{k+1}{k^2+k+1}\overrightarrow{OB_1}$ pentru orice punct O din plan. (**1p**)

Cum $\overrightarrow{OB_1} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{OC} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{OA}$ obtinem:

$\overrightarrow{OA_2} = \frac{k^2}{k^2+k+1}\overrightarrow{OB} + \frac{k}{k^2+k+1}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{k^2+k+1}\overrightarrow{OC}$. Analog:

$\overrightarrow{OB_2} = \frac{k^2}{k^2+k+1}\overrightarrow{OC} + \frac{k}{k^2+k+1}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{k^2+k+1}\overrightarrow{OA}$ si

$\overrightarrow{OC_2} = \frac{k^2}{k^2+k+1}\overrightarrow{OA} + \frac{k}{k^2+k+1}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{k^2+k+1}\overrightarrow{OB}$.**(2p)**

Pentru punctual a) obtinem $\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OC_2} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ de unde $3\overrightarrow{OG_2} = 3\overrightarrow{OG} \Leftrightarrow G = G_2$ unde G si G_2 sunt centrele de greutate ale triunghiurilor ABC si respectiv $A_2B_2C_2$ **(1p)**

b) Avem
$\overrightarrow{AA_2} + \overrightarrow{BB_2} + \overrightarrow{CC_2} = \frac{k^2}{k^2+k+1}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{k^2+k+1}\overrightarrow{AC} + \frac{k^2}{k^2+k+1}\overrightarrow{BC}\frac{1}{k^2+k+1}\overrightarrow{BA} + \frac{k^2}{k^2+k+1}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{k^2+k+1}\overrightarrow{CB} = \frac{k^2-1}{k^2+k+1}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \vec{0}$
de unde rezulta ca vectorii $\overrightarrow{AA_2}, \overrightarrow{BB_2}, \overrightarrow{CC_2}$ pot fi laturile unui triunghi. **(2p)**

3.Sa se rezolve in R ecuatia

$$\{x\}^n - [x]^n = x^n$$

unde $\{x\}$, $[x]$ reprezinta partea fractionara, respectiv intreaga a lui x, iar $n \in \mathbb{N}$.

Soluție: Notăm $[x] = k \in \mathbf{Z}$, respectiv $\{x\} = \alpha \in [0,1)$; prin urmare $x = k + \alpha$.

Avem din ipoteză: $(k+\alpha)^n = \alpha^n - k^n$ **(2p)**

- Pentru $k \geq 0$ rezultă $(k+\alpha)^n \geq k^n$ şi folosind ipoteza rezultă $\alpha^n \geq 2 \cdot k^n$, de unde $k < 1$, deci $k = 0$ **(2p)**şi obținem soluția $\underline{x \in [0,1)}$.**(1p)**

- Pentru $k < 0$ avem evident $k + \alpha < 0$.

Dacă n – par, rezultă $(k+\alpha)^n > 0$ şi cum $0 \leq \alpha^n < 1 < k^n$ rezultă $\alpha^n - k^n < 0$ şi se contrazice relația din ipoteză.

Dacă n – impar, rezultă $(k+\alpha)^n < 0$ iar $\alpha^n - k^n > 0$, din nou fals **(2p)**.