Subiectul I
Fie A si B doua matrice de ordinul k mai mare sau egal cu 1 . Sa se demonstreze ca daca : $\det(A+nB)=\det(nA+B)$ pentru cel putin k+1 valori distincte ale numarului natural $n \geq 1$, atunci $\det A=\det B$.
Solutie.
Daca se considera polinomul in nedeterminata X
$P(X)=\det(A+XB)-\det(XA+B)$ **(2p)**
prin dezvoltarea determinantilor avem ca acesta are gradul $\leq k$. **(1p)**
Din ipoteza are cel putin k+1 radacini distincte . **(2p)**
Deci este un polinom identic nul, asadar se anuleaza in o: **(1p)**
$P(0)=0 \Rightarrow \det A=\det B$. **(1p)**
Subiectul II

Fie f:R $\rightarrow$R, o funcție continuă şi mărginită. Demonstrați că există a, b$\in$ R astfel încât a-b=1 şi $\left(a^2+1\right)\cdot f(b)=\left(b^2+1\right)\cdot f(a)$.

Rezolvarea:

Dacă g:R$\rightarrow$R, g$(x)=\frac{1}{x^2+1}\cdot f(x)$ ....1p.
Atunci problema se reduce la a arăta că există a,b$\in R$ cu a-b=1 şi g(a)=g(b).
Datorită mărginirii lui f rezultă :
$\lim_{x\rightarrow\pm\infty} g(x)=0$ şi considerăm funcția h:R$\rightarrow$R,h(x)=g(x+1)-g(x) care este continuă..2p.
Dacă, prin reducere la absurd, h nu se anulează ,ținând cont de continuitatea lui h , avem h pozitiv sau h negativ.................................1p.
Presupunem h pozitiv.
Atunci g(x+1)>g(x), $(\forall)x\in R$, de unde deducem
g(n)>g(1)>g(0)>g(-n),$(\forall)n\in N, n\geq 2$ ....1p.
şi cum $\lim_{x\rightarrow\pm\infty}$ g(x)=0, rezultă:
0=$\lim_{\mathrm{ln}\rightarrow\infty}$ g(n)$\geq g(1)>g(0)\geq \lim_{n\rightarrow\infty} g(-n)=0$,
ceea ce reprezintă o contradicție………………………………1p.
Deci, $(\exists)b\in R$ astfel încât h(b)=0, adică g(b)=g(b+1)
şi notăm b+1=a…………………………………………………1p.

Subiectul 3

Fie $(a_n)_{n\geq1}$ un şir de numere reale monoton crescător , astfel încât $a_n\geq1, (\forall)n\in N^*, iar\ (x_n)_{n\geq1}; şi (y_n)_{n\geq1}$, două şiruri de numere reale definite prin:

$$x_n = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1+[k\cdot a_k]}{k}\right], \quad y_n = \sum_{k=1}^{n}[a_k],$$

unde [,] reprezintă funcția partea întreagă. Dacă $(z_n)_{n\geq 1}$ este un şir de numere reale strict pozitive cu proprietatea :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(2\cdot a_n+1)}{z_n}=0 \text{ , calculați:}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-y_n}{z_n}.$$

Rezolvare:

$\mathrm{k}\cdot a_k < 1+[k\cdot a_k] \leq 1+k\cdot a_k < 2\cdot k\cdot a_k$,............................1p.

rezultă

$[a_k] < \left[\frac{1+[k\cdot a_k]}{k}\right] < [2\cdot a_k], (\forall) k\in N^*$ ....1p.

Pentru n$\in N^*$, oarecare, se dau valori lui k de la 1 la n şi se însumează inegalitățile obținute. ....2p.

Rezultă:

$$0 < x_n - y_n < \sum_{k=1}^{n}\left[a_k+\frac{1}{2}\right] \leq \sum_{k=1}^{n}\left(a_k+\frac{1}{2}\right) \leq n\cdot a_n + \frac{n}{2} = \frac{1}{2}n(2\cdot a_n+1) \Rightarrow$$

....2p.

$$0 < \frac{x_n-y_n}{z_n} < \frac{1}{2}\cdot\frac{n(2\cdot a_n+1)}{z_n}; (\forall) n\geq 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{x_n-y_n}{z_n}=0$$

finalizarea...1p.