SOLUȚII

SUBIECTUL 1.

$2^{x^2+y^2-5}-19\cdot 2^{x^2+1}-2010=0$

$\Leftrightarrow\ 2^{x^2+1}\left(2^{y^2-6}-19\right)=2\cdot 3\cdot 5\cdot 67$, $x,y\in N$ **(1p)**

Cum $\Rightarrow\begin{cases}2^{x^2+1}=2\\ 2^{y^2-6}-19=1005\end{cases}$ **(1p)**$\Rightarrow\begin{cases}x^2=0\\ 2^{y^2-6}=1024\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=4\end{cases}$. **(2p)**

Obținem $z=\log_2 4=2$ **(1p)**

şi $\sum_{k=0}^{y}\left(\log_2 y\right)^k=2^0+2^1+2^2+2^3+2^4=31$.

De unde rezultă $\left(\sum_{k=x}^{y}z^k\right)-1$=30 divide 2010**.(2p)**

SUBIECTUL 2.

Alegem centrul cercului drept originea planului complex.

Fie A, B, C şi D de afixe a, b, -c, -d şi E respectiv F mijloacele diagonalelor AC, respectiv BD. **(1p)**

Urmează că $E\left(\frac{a-c}{2}\right)$şi $F\left(\frac{b-d}{2}\right)$.

Relația din ipoteză este echivalentă cu

$(b-a)\left(\bar{b}-\bar{a}\right)+(-c-b)\left(-\bar{c}-\bar{b}\right)+(-d-c)\left(-\bar{c}-\bar{d}\right)+(-d-a)\left(-\bar{d}-\bar{a}\right)=8R^2$ **(1p)** $\Leftrightarrow$

$-a\bar{b}-\bar{a}b+b\bar{c}+\bar{b}c+a\bar{d}-c\bar{d}-\bar{c}d+a\bar{d}+\bar{a}d=0$ întrucât $|a|^2=|b|^2=|c|^2=|d|^2=R^2$. **(1p)**

Ultima relație se mai scrie încă

$(a-c)\left(\bar{d}-\bar{b}\right)+(d-b)\left(\bar{a}-\bar{c}\right)=0\Leftrightarrow(a-c)\left(\overline{d-b}\right)+\overline{(a-c)\left(\overline{d-b}\right)}=0$. **(1p)**

Avem 2 cazuri:

Caz 1) $(a-c)\left(\overline{d-b}\right)$=0 adică $\frac{a-c}{2}=0$ de unde avem că E = O adică AC este diametru

sau $\frac{d-b}{2}=0$ de unde avem că F = O adică BD este diametru**.**

(1p)

Caz 2) $(a-c)\left(\overline{d-b}\right)\neq 0$ şi atunci

$(a-c)\left(\overline{d-b}\right)=-\left(\overline{a-c}\right)(d-b)\Leftrightarrow\frac{a-c}{d-b}=-\overline{\left(\frac{a-c}{d-b}\right)}\Rightarrow\frac{a-c}{d-b}\in iR^*\Leftrightarrow DB\perp AC$. **(2p)**

SUBIECTUL 3.

Ipoteza impune condiția $x \in [0, 2\pi)$

Ecuația dată este echivalentă cu:

$$\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{3x}{2}+\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{3x}{2}+(m-1)\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{3x}{2}=\cos x$$ **(1p)**

adică $\cos(-x)+(m-1)\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}=\cos x,$

$\cos x+(m-1)\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{3x}{2}=\cos x\,(\forall)m\in R/\{1\}$ **(1p)** de unde rezultă

$\sin\frac{x}{2}=0\Rightarrow x_1=0$ și **(1p)**

$\sin\frac{3x}{2}=0\Rightarrow x_1=0, x_2=\frac{2\pi}{3}, x_3=\frac{4\pi}{3}$ **(1p)**

Imaginile pe cercul trigonometric corespunzătoare celor trei soluții sunt

$A(z_A), B(z_B), C(z_C)$ unde $z_A=1, z_B=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, z_C=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.**(1p)**

Prin calcul direct se probează că $|z_A-z_B|=|z_B-z_C|=|z_A-z_C|$ ceea ce implică faptul că triunghiul ABC este echilateral. **(2p)**